Name: **Leginummer:**

Mathematik-Teil der Prüfung Mathematik III und Systemanalyse II im Frühling 2008

Vorlesung *Mathematik III und Systemanalyse II* von Dr. P. Thurnheer.

Vorgesehene Zeit für diesen Teil: 40 Minuten

Maximale Punktzahl: 15 Punkte

Hilfsmittel: Schriftliche Unterlagen, kein Taschenrechner, kein Mobiltelephon

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
Total		

1. Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauss und unter Einführung neuer geeigneter Koordinaten den Fluss des Vektorfeldes

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} z \sin y \\ xz \cos y \\ z e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche des geraden Kreiszylinders mit Höhe 3 und Grundkreis

$$K = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 \leq 2, z = 0\}.$$

Orientieren Sie die Oberfläche so, dass die Normale nach aussen zeigt.
Hinweis: $\left(e^{r^2}\right)' = ?$

(ca. 4 Punkte)

2. Lösen Sie folgende Aufgaben für die Vektorfelder

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \ln x \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2} z \\ -2z + xyz \\ 2y + \frac{y^2}{2} x \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $\operatorname{rot} F(x,y,z)$ und $\operatorname{rot} G(x,y,z)$.

b) Geben Sie eine spezielle geometrische Eigenschaft der Vektoren von $\operatorname{rot} F(x,y,z)$ und zwei spezielle Eigenschaften der Vektoren von $\operatorname{rot} G(x,y,z)$ an.

c) Mit dem Satz von Stokes: Wie gross ist aufgrund Ihrer Feststellung unter b) die Arbeit des Vektorfeldes $F(x,y,z)$ resp. $G(x,y,z)$ längs eines ebenen geschlossenen Weges γ, der in einer Normalebene zur x-Achse liegt? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) (Kann unabhängig von den Teilaufgaben a) bis c) gelöst werden.) Berechnen Sie explizit, das heisst als Linienintegral, die Arbeit des Vektorfeldes $G(x,y,z)$ längs des Kreises

$$k = \{(x,y,z) | x = 0, y^2 + z^2 = 4\}.$$

Vergleichen Sie Ihr Resultat mit Ihrer Antwort unter c).

(ca. 7 Punkte)

3. Reduzieren Sie die partielle Differentialgleichung

$$x u_x(x,t) - \frac{1}{\ln t} u_t(x,t) = 0$$

durch einen Separationsansatz in Produktform auf zwei gewöhnliche Differentialgleichungen und bestimmen Sie deren allgemeine Lösungen.

Tip: Schreiben Sie $\ln t = 1 \cdot \ln t$ und integrieren Sie partiell.

(ca. 4 Punkte)